1 °/ Généralités sur les suites numériques

1.1 Définition d'une suite numérique

Définition : Une suite notée (u_n) est une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels (ou sur l'ensemble $\mathbb{N}$ privé des premier entiers 0 ; 1 ; 2 ; ...) et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Aux entiers naturels 0, 1, 2, ... , n sont associés respectivement
les nombres réels notés u_0 , u_1 , u_2 , ... , u_n et appelés termes de la suite (u_n).
Le terme u_n d'indice n ou de rang n est appelé terme général de la suite (u_n).

Remarque : Autrement dit, **une suite numérique est une liste de nombres réels que l'on numérote à l'aide d'entiers naturels**, le plus souvent à partir de 0 ou à partir de 1 ou même à partir d'un entier naturel supérieur ou égal à 2 selon la nature de cette suite.

Exemple :
– **La liste des entiers naturels impairs est une suite** dont les premier termes sont 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11 ...
On peut noter : $u_0 = 1$; $u_1 = 3$; $u_2 = 5$; $u_3 = 7$; $u_4 = 9$; $u_5 = 11$; ...
et, en remarquant que le premier terme est égal à 1 et que l'on ajoute 2 à chaque fois pour obtenir le terme suivant, on comprend le mode de génération de cette suite (u_n) et on peut écrire plus généralement :

$$u_n = 2n + 1 \text{ pour tout entier naturel } n.$$

a. Calculer u_{10} ; u_{100} ; u_{1000} ; u_{3285}.

b. Quelle est la valeur de l'entier naturel n pour laquelle on a $u_n = 689$?

Quel est le rang de 689 dans la liste des entier naturels impairs ?

1.2 Modes de génération d'une suite numérique

1.2.1 Suite définie par une formule explicite

Définition : Une suite numérique (u_n) est définie par sa forme explicite quand son terme général u_n est l'image de tout entier naturel n par une fonction f qui est définie par sa formule, on a $u_n = f(n)$.

Exemple :
Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 2$ par : $v_n = \dfrac{4}{n-1}$.

a. Calculer les quatre premiers termes de la suite (v_n).

b. Quel est le plus petit entier naturel n pour lequel on a $v_n \leq 0{,}05$?

→ ☺ Coup de pouce vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=9HhEeMWimNo&feature=youtu.be

1.2.2 Suite définie par récurrence

Définition : Une suite numérique (u_n) est définie par récurrence lorsque l'on donne deux informations :

- **Son premier terme ;**
- **Une relation entre deux termes consécutifs, appelée "relation de récurrence", qui permet de calculer le terme suivant à partir du terme précédent.**

Remarques :

∗ La connaissance du terme initial (en général u_0 ou u_1 ...) est indispensable, car chaque terme s'obtient ensuite de proche en proche en utilisant la relation de récurrence (en général entre u_{n+1} et u_n ; parfois entre u_n et u_{n-1} ...)

∗ Il est possible, comme nous l'avons observé dans la suite de Fibonacci, que les deux premiers termes soient donnés en première information et une relation de récurrence entre trois termes consécutifs en deuxième information.

→ ☺ Coup de pouce vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=HacflVQ7DIE&feature=youtu.be

2°/ Représentation graphique d'une suite numérique

Définition : Dans un repère du plan, la représentation graphique d'une suite (u_n) définie sur ℕ est l'ensemble des points de coordonnées $(n\ ;\ u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

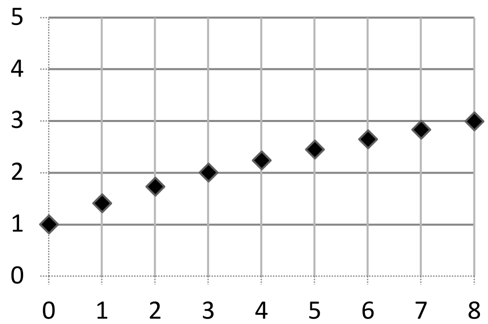
Remarque : La représentation graphique d'une suite est donc **un nuage de points** et pas une courbe ... car on ne relie pas les points !

Exemple 1 : Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \sqrt{n+1}$.

On peut lire, par exemple, sur ce graphique **obtenu à l'aide d'un tableur** :

$u_0 = 1$; $u_3 = ...$;
$u_5 \approx ......$; $u_8 = ...$.

Obtenir ce graphique à l'aide de la calculatrice ... Point méthode !

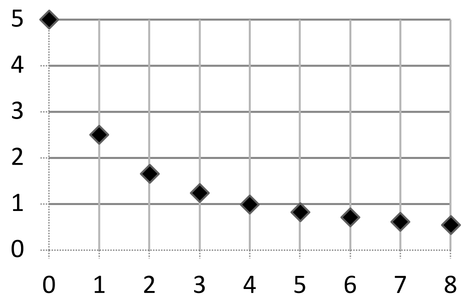


Exemple 2 : Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \dfrac{5}{n+1}$.

On peut lire, par exemple, sur ce graphique **obtenu à l'aide d'un tableur** :

$v_0 = ...$; $v_1 = 2{,}5$;
$v_4 = ...$; $v_8 \approx .....$.

Obtenir ce graphique à l'aide de la calculatrice ... Point méthode !



→ ☺ Coup de pouce vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=VpSK4uLTFhM&feature=youtu.be

3°/ Sens de variation d'une suite numérique

3.1 Définitions

Définitions : Dans le cas d'une suite (u_n) monotone sur $\mathbb{N}$, c'est-à-dire ayant un unique sens de variation sur $\mathbb{N}$, on distingue trois cas :
- **Dire qu'une suite (u_n) est croissante signifie que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} \geq u_n$.**
- **Dire qu'une suite (u_n) est décroissante signifie que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} \leq u_n$.**
- **Dire qu'une suite (u_n) est constante signifie que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = u_n$.**

Exemple 1 (résolu) : Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \sqrt{n+1}$.
Démontrons que la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.
On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \sqrt{n+1}$ et $u_{n+1} = \sqrt{n+2}$.
*Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $n+2 \geq n+1$, et la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ donc $\sqrt{n+2} \geq \sqrt{n+1}$, ce qui signifie que pour tout entier naturel n, on a $\boldsymbol{u_{n+1} \geq u_n}$ et **donc la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.***

3.2 Étude du sens de variation d'une suite numérique

Il n'est pas toujours aisé de comparer directement les termes u_{n+1} et u_n pour étudier le sens de variation d'une suite ... On peut donc définir certaines règles.
Pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n), on peut procéder (***en choisissant la méthode la plus adaptée selon les cas***) de l'une des manières suivantes :

Étude du signe de $u_{n+1} - u_n$.
- **Si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors la suite (u_n) est croissante.**
- **Si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors la suite (u_n) est décroissante.**

En effet, $u_{n+1} - u_n \geq 0 \iff u_{n+1} \geq u_n$ ou $u_{n+1} - u_n \leq 0 \iff u_{n+1} \leq u_n$ pour tout entier naturel n.

Exemple 1 : Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n par : $u_{n+1} = u_n + n + 1$.

a. Calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n).

b. Conjecturer son sens de variation, puis démontrer cette conjecture.

Exemple 2 : Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par : $u_n = -n^2 + n + 1$.

a. Calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n).

b. Conjecturer son sens de variation, puis démontrer cette conjecture.

Remarque : Si, comme c'est le cas dans l'exemple 2 précédent, la suite est définie de manière explicite (rappel : c'est-à-dire en fonction de n), il existe alors une autre méthode passant par une étude de fonction ...

Si la suite est définie de manière explicite, étude du sens de variation d'une fonction.
f est une fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et pour tout entier naturel n, $u_n = f(n)$.
- **Si la fonction f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$, alors la suite (u_n) est croissante.**
- **Si la fonction f est décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$, alors la suite (u_n) est décroissante.**

En effet : Si la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, alors $n+1 \geq n \implies f(n+1) \geq f(n)$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq u_n$.
Si la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, alors $n+1 \geq n \implies f(n+1) \leq f(n)$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_n$.

→ ☺ Coup de pouce vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=dPR3GyQycH0&feature=youtu.be

En utilisant la méthode de votre choix ...

Exemple 1 : Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \frac{5}{n+1}$.
Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et démontrer cette conjecture.

Exemple 2 : Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = -n^2 - 4n + 15$.
Conjecturer le sens de variation de la suite (v_n) et démontrer cette conjecture.

Exemple 3 : Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = \frac{7}{3^n}$.
Conjecturer le sens de variation de la suite (w_n) et démontrer cette conjecture.

→ ☺ Coup de pouce vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=DFz8LDKCw9Y&feature=youtu.be
→ ☺ Coup de pouce vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=R8a60pQwiOQ&feature=youtu.be

Remarque : ***Démontrer le sens de variation d'une suite n'est pas toujours possible en 1ère, lorsque cette suite est définie par récurrence****, ou alors il faut qu'il soit possible de trouver une forme explicite de cette suite définie par récurrence.* ***Par exemple, lors des activités qui vont suivre au paragraphe 4, on ne pourra que "conjecturer" le sens de variation des suites, la démonstration demandant un "raisonnement par récurrence" qui ne se voit qu'en "Spécialité Mathématiques de Terminale".***

4°/ Notion de "limite d'une suite"

4.1 Approche intuitive de la notion de "limite d'une suite".

Définitions :

- **Dire qu'une suite (u_n) est convergente signifie que la suite (u_n) a une limite finie, c'est-à-dire que tous ses termes se rapprochent d'une valeur réelle ℓ quand l'entier naturel n devient grand.**

  On peut écrire : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ **avec** $\ell \in \mathbb{R}$. $(\textit{notation non exigible})$

- **Dire qu'une suite (u_n) est divergente signifie que la suite (u_n) n'est pas convergente, c'est-à--dire qu'elle n'a pas de limite finie.**

On distingue trois cas :

- **Tous ses termes deviennent de plus en plus grands quand l'entier naturel n devient grand.**

  On peut écrire : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. $(\textit{notation non exigible})$

- **Tous ses termes deviennent négatifs et de plus en plus grands en valeur absolue quand l'entier naturel n devient grand.**

  On peut écrire : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$. $(\textit{notation non exigible})$

- **La suite n'est pas monotone et n'a pas de limite.**

- **Si une suite a une limite, cette limite est unique.**

→ ☺ Coup de pouce vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=CsBorh8LLyE&feature=youtu.be

4.2 Dans le cas d'une suite monotone : recherche du rang à partir duquel on dépasse un seuil.

Deux méthodes : le tableau de valeurs de la calculatrice ou la programmation d'un algorithme.

Exemple 1 : La suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n par : $u_{n+1} = u_n + n + 1$.
Nous avons démontré page 3 que cette suite est croissante.

1. Conjecturer une limite éventuelle.

2. En utilisant le tableau de valeurs de la calculatrice, répondre aux deux questions suivantes :

a. Quel est le plus petit entier naturel n pour lequel on a $u_n \geq 500$?

b. Quel est le plus petit entier naturel n pour lequel on a $u_n \geq 1\,000$?

3. a. Écrire un algorithme permettant de répondre aux deux questions 2.a et 2.b.

b. Traduire cet algorithme dans un programme Python et le tester pour vérifier les résultats obtenus à la question **2.**

Exemple 2 : La suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par : $u_{n+1} = 0{,}5u_n - 7$.
On admettra que cette suite est décroissante.

1. Conjecturer une limite éventuelle.

2. En utilisant le tableau de valeurs de la calculatrice, répondre aux deux questions suivantes :

a. Quel est le plus petit entier naturel n pour lequel on a $u_n < -13{,}99$?

b. Quel est le plus petit entier naturel n pour lequel on a $u_n < -13{,}9999$?

3. a. Écrire un algorithme permettant de répondre aux deux questions 2.a et 2.b.

b. Traduire cet algorithme dans un programme Python et le tester pour vérifier les résultats obtenus à la question **2.**

5°/ Des suites arithmétiques

5.1 Définition, vocabulaire et notations

Une suite est arithmétique lorsqu'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre.

Définition : Dire qu'une suite (u_n) est arithmétique signifie qu'il existe un nombre réel r tel que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = u_n + r$.

Le nombre réel r est appelé la raison de la suite (u_n).

Exemple : La suite des entiers naturels impairs est la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2.

5.2 Formules explicites du terme général d'une suite arithmétique

Propriété : Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors pour tout entier naturel n, on a $u_n = u_0 + nr$.

En effet, pour passer de u_0 à u_n on ajoute n fois la raison r, c'est-à-dire on ajoute $n \times r$.

Remarques importantes :

■ Pour passer de u_1 à u_n on ajoute donc $(n-1)$ fois la raison r, c'est-à-dire on ajoute $(n-1) \times r$.
On en déduit : $\boldsymbol{u_n = u_1 + (n-1)r}$.

■ **Plus généralement, pour tous entiers naturels p et n (avec $p < n$),** pour passer de u_p à u_n on ajoute donc $(n-p)$ fois la raison r, c'est-à-dire on ajoute $(n-p) \times r$.
On en déduit : $\boldsymbol{u_n = u_p + (n-p)r}$.

Exemple 1 : On considère une suite (u_n) arithmétique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison $r = \frac{4}{3}$.

a. Calculer la valeur exacte des termes u_{27} et u_{50} .

b. Démontrer le sens de variation de la suite (u_n).

Exemple 2 : On considère une suite (v_n) arithmétique de premier terme v_0 et tel que $v_2 = 5$ et $v_{14} = -19$.

a. Calculer la raison r de cette suite.

b. En déduire la valeur de v_0 puis de v_{100}, et démontrer le sens de variation de cette suite.

→ ☺ Coup de pouce vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=VpSK4uLTFhM&feature=youtu.be

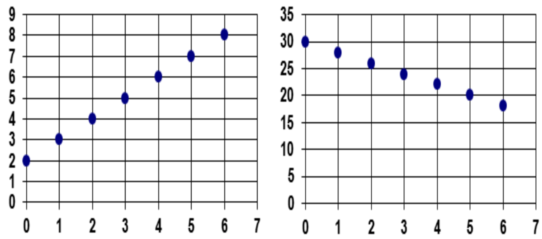
5.3 Représentation graphique et sens de variation d'une suite arithmétique

Propriété 1 : Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors sa représentation graphique est un nuage de points alignés et ses points appartiennent à une droite dont le coefficient directeur est la raison r.

Propriété 2 : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
- **Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est strictement croissante pour tout entier naturel n ;**
- **Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante pour tout entier naturel n.**

Démonstration : On sait, par définition, qu'une suite est arithmétique s'il existe un réel r tel que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = u_n + r$.
On en déduit que : $u_{n+1} - u_n = r$ et donc que **le signe de $u_{n+1} - u_n$ ne dépend que du signe de r**. Ainsi :
- Si $r > 0$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$, donc la suite (u_n) est strictement croissante ;
- Si $r < 0$ alors $u_{n+1} - u_n < 0$, donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

Illustrations graphiques des propriétés 1 et 2 :
(à gauche, pour $r = 1$ donc $r > 0$)
(à droite, pour $r = -2$ donc $r < 0$)



5.4 Points méthodes

Point méthode n°1 : Pour montrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, on peut **montrer que la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante**, c'est-à-dire indépendante de l'entier naturel n.
On obtient du même coup sa raison r et le sens de variation de la suite (u_n).

Point méthode n°2 : Pour montrer qu'une suite (u_n) n'est pas arithmétique, il suffit de **trouver un contre-exemple. On peut, par exemple, montrer que $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$.**

→ ☺ Coup de pouce vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=YCokWYcBBOk&feature=youtu.be

Exemple 1 : On considère une suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = 2n - 3$.
a. Montrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme.
b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
c. Déterminer, à la calculatrice et par le calcul, la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle : $u_n \geq 100$.

Exemple 2 : On considère une suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = n^3 - 3$.
La suite (u_n) est-elle arithmétique ?

Aide : *Devant une telle question, il faut **conjecturer la réponse à la calculatrice** (tableau de valeurs ou représentation graphique) et **choisir alors le point méthode n°1 ou le point méthode n°2 pour répondre**.*

5.5 Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Propriété – La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique (u_n) est égale au produit du nombre de termes par la demi-somme du premier et du dernier terme :

$$\text{Somme de termes consécutifs} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

En particulier, pour une suite arithmétique de premier terme u_0 , on a :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}.$$

Et pour une suite arithmétique de premier terme u_p et de dernier terme u_n , on a :

$$S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = [n + 1 - p] \times \frac{u_p + u_n}{2} = (n - (p-1)) \times \frac{u_p + u_n}{2}.$$

Démonstration (*exigible*) **: soit la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n = n$.**

$$\textbf{Montrer que : } S = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

→ ☺ Coup de pouce vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=-G3FWv5Bkzk&feature=youtu.be

Exemple : On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = 2n - 3$.
On sait que cette suite est arithmétique (*nous l'avons démontré dans un exemple précédent* ...).

Calculer la somme : $S = \sum_{k=4}^{25} u_k = u_4 + u_5 + \cdots + u_{25}$.

6°/ Des suites géométriques

6.1 Définition, vocabulaire et notations

Une suite est géométrique lorsqu'on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre.

Définition : Dire qu'une suite (u_n) est géométrique signifie qu'il existe un nombre réel q tel que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le nombre réel q est appelé la raison de la suite (u_n).

Exemple : La suite des puissances d'un entier naturel est une suite géométrique.
Si on considère les puissances de 2, on a en effet une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 2. En effet, on a : $1 \times 2 = 2$; $2 \times 2 = 4$; $4 \times 2 = 8$; $8 \times 2 = 16$ ...
Et pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n$.

6.2 Formules explicites du terme général d'une suite géométrique

Propriété : Si (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, alors pour tout entier naturel n, on a $u_n = u_0 \times q^n$.

En effet, pour passer de u_0 à u_n on multiplie n fois par la raison q, c'est-à-dire on multiplie u_0 par q^n.

Remarques importantes :

■ Pour passer de u_1 à u_n on multiplie donc $(n-1)$ fois par la raison q, c'est-à-dire on multiplie u_1 par q^{n-1}.
On en déduit : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

■ **à retenir ! ... Plus généralement, pour tous entiers naturels p et n (avec $p < n$),** pour passer de u_p à u_n on multiplie donc $(n-p)$ fois par la raison q, c'est-à-dire on multiplie u_p par q^{n-p}.
On en déduit : $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Exemple 1 : On considère une suite (u_n) géométrique de premier terme $u_0 = 18$ et de raison $q = \frac{4}{3}$.

a. Calculer la valeur exacte des termes u_1 ; u_2 ; u_4 et u_6 .

b. Calculer la valeur arrondie à 1 près des termes u_{10} et u_{20} , et conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

Exemple 2 : On considère une suite (v_n) géométrique de premier terme v_0 et tel que $v_2 = 1{,}62$ et $v_4 = 1{,}3122$.

a. Calculer la raison q de cette suite (on suppose que $q > 0$).

b. En déduire la valeur de v_0 puis l'arrondi au millième de v_{25} , et conjecturer le sens de variation de cette suite.

6.3 Points méthodes

Point méthode n°1 : Pour montrer qu'une suite (u_n) est géométrique, on peut **montrer que le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant**, c'est-à-dire indépendant de l'entier naturel n, **ou plus simplement montrer l'existence d'un réel q tel que $u_{n+1} = q \times u_n$ par factorisation du terme u_{n+1} .**
Le réel q est alors la raison de la suite (u_n).

Exemple : On considère une suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = 3 \times 1{,}2^n$.
Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

Point méthode n°2 : Pour montrer qu'une suite (u_n) n'est pas géométrique, il suffit de **trouver un contre-exemple. On peut, par exemple, montrer que $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$.**

Exemple : On considère une suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = 2 \times 3^n - 1$.
La suite (u_n) est-elle géométrique ?

→ ☺ Coup de pouce vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=YPbEHxuMaeQ&feature=youtu.be

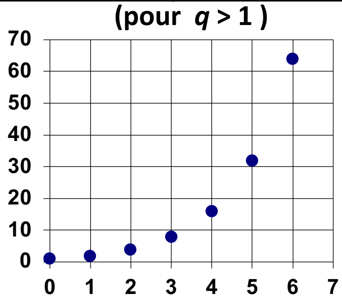
Remarque : Devant une telle question, il faut **conjecturer la réponse à la calculatrice** (tableau de valeurs ou représentation graphique) et **choisir alors le point méthode n°1 *ou* le point méthode n°2 pour rédiger la réponse**.

6.4 Représentation graphique, sens de variation et étude de la convergence d'une suite géométrique

Propriété 1 : Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.
Si $q > 0$ et si $u_0 > 0$, alors sa représentation graphique est un nuage de points montrant des valeurs de u_n avec une croissance très rapide (si $q > 1$) ou une décroissance vers 0 (si $0 < q < 1$) et tous les points du nuage sont au-dessus de l'axe des abscisses (termes u_n positifs).
Si $q > 0$ et si $u_0 < 0$, les sens de variation sont inversés et tous les points du nuage sont en-dessous de l'axe des abscisses (termes u_n négatifs).
Si $q < 0$, quel que soit le signe du premier terme u_0 , le nuage de points montre les variations irrégulières d'une suite non monotone mais avec une convergence vers 0 lorsque $-1 < q < 0$.

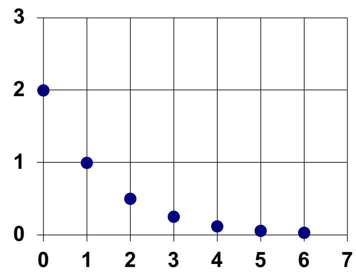
Illustrations graphiques de deux suites géométriques (u_n) dans le cas d'une raison q strictement positive et d'un premier terme u_0 strictement positif :

(pour $q > 1$)



)

(pour $0 < q < 1$)



Remarque : Si le premier terme u_0 est strictement négatif, il y a inversion des sens de variation.

Propriété 2 : Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.

- Si $q > 1$ et $u_0 > 0$ alors la suite (u_n) est **strictement croissante** pour tout entier naturel n et elle est **divergente** : **sa limite est égale à $+\infty$** ;
- Si $q > 1$ et $u_0 < 0$ alors la suite (u_n) est **strictement décroissante** pour tout entier naturel n et elle est **divergente** : **sa limite est égale à $-\infty$** ;
- Si $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$ alors la suite (u_n) est **strictement décroissante** pour tout entier naturel n et elle est **convergente** : **sa limite est égale à 0** ;
- Si $0 < q < 1$ et $u_0 < 0$ alors la suite (u_n) est **strictement croissante** pour tout entier naturel n et elle est **convergente** : **sa limite est égale à 0** ;
- Si $-1 < q < 0$ alors la suite (u_n) n'est **pas monotone** pour tout entier naturel n et elle est **convergente** : **sa limite est égale à 0** ;
- Si $q < -1$ alors la suite (u_n) n'est **pas monotone** pour tout entier naturel n et elle est **divergente car elle n'a pas de limite** ;

Remarques :

- Si $q = 1$, la suite (u_n) est constante et tous les termes sont égaux à u_0 .
- Si $q = 0$, la suite (u_n) est constante et tous les termes sont nuls sauf u_0 .

6.5 Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.

Propriété – La somme de termes consécutifs d'une suite géométrique (u_n) de raison $q \neq 1$ est :

$$\text{Somme de termes consécutifs} = (\text{valeur du premier terme}) \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}.$$

En particulier, pour une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \neq 1$, on a :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Et pour une suite géométrique de premier terme u_p , de dernier terme u_n et de raison $q \neq 1$, on a :

$$S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = u_p \times \frac{1 - q^{n+1-p}}{1 - q} = u_p \times \frac{1 - q^{n-(p-1)}}{1 - q}.$$

Démonstration (*exigible*) : soit la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = q^n$ avec $q \neq 1$.

$$\text{Montrer que : } S = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

→ ☺ Coup de pouce vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=7msY7aEe084&feature=youtu.be

Exemple 1 : On considère une suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = 3 \times 1{,}2^n$.
On sait que (u_n) est une suite géométrique (*nous l'avons démontré dans un exemple précédent*).

Calculer la somme : $S = \sum_{k=3}^{12} u_k = u_3 + u_4 + \cdots + u_{12}$.

Exemple 2 : Soi la somme S définie par :

$$S = 5 + 5 \times 0{,}9 + 5 \times 0{,}9^2 + \cdots + 5 \times 0{,}9^9.$$

Calculer S (on donnera le résultat arrondi au millième).