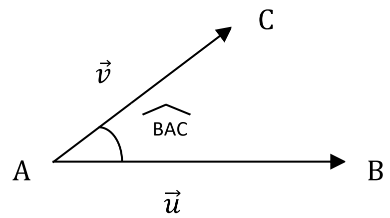
Rappels importants :

- **Définition d'un vecteur :**
  Un vecteur $\vec{u}$ peut être représenté par une infinité de segments du plan ayant tous les mêmes caractéristiques suivantes :
  Si le vecteur $\vec{u}$ est représenté par un segment $[AB]$, A et B étant deux points du plan, alors :
  1. **Sa direction** est indiquée par **la droite (AB)** et **cette direction est donc unique** ;
  2. **Son sens**, qui peut être de **A vers B** (alors $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$) **ou** de **B vers A** (alors $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$) donc **deux sens possibles**, qui sont **opposés** ; on écrit $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$;
  3. **Sa norme**, qui est la longueur du segment $[AB]$, c'est-à-dire **la distance AB** et on note :
     $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BA}\| = AB$ *c'est-à-dire que deux vecteurs opposés ont la même norme.*
- **Conséquences – Égalités vectorielles :**
  - **Deux vecteurs sont égaux** si et seulement si ces deux vecteurs ont à la fois même direction, même norme et même sens.
  - **Deux vecteurs sont opposés** si et seulement si ces deux vecteurs ont à la fois même direction et même norme mais sont de sens contraire.
  - **Un quadrilatère ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.**
  - **Règle du parallélogramme** : (*Très utilisée en Physique pour définir la résultante de deux forces*)
    Soient quatre points A ; B ; C et D du plan,
    ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.
  - **Milieu d'un segment** : Soient trois points A ; B et I du plan.
    I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ou $\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{AI}$.
    Remarques : $AI = IB$ *ne suffit pas pour que* I *soit le milieu de* $[AB]$ … *on peut avoir aussi un triangle* ABI *isocèle en* I, *alors qu'avec la relation* $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ *les points* A ; B *et* I *sont alignés*. (***d'où l'importance aussi de respecter les notations ! … AI ≠ $\overrightarrow{AI}$!!! …***)
    La relation vectorielle $\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{AI}$ *signifie aussi que* ***les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires et donc les points A ; B et I alignés***.

1°/ Définitions et notations du produit scalaire de deux vecteurs

Définition : Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan et trois points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est le nombre réel, noté $\vec{u}.\vec{v}$, tel que :
- **$\vec{u}.\vec{v} = 0$ si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul ;**
- **$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\widehat{BAC})$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.**



Sur la figure, on considère trois points A, B et C tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient deux représentants respectifs des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On peut alors écrire : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC})$
d'où $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

Conséquences importantes :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan, trois points A, B et C tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient deux représentants respectifs des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

■ **Propriété de symétrie du produit scalaire : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, on a $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$.**

<u>Démonstration</u> : On a $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\left(\widehat{BAC}\right)$ et $\vec{v}.\vec{u} = \|\vec{v}\|\|\vec{u}\|\cos\left(\widehat{CAB}\right)$.
Or $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| = \|\vec{v}\|\|\vec{u}\|$ car la multiplication est commutative et $\widehat{BAC} = \widehat{CAB}$.
donc $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}}$ *(cqfd)*

■ **Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont <u>colinéaires et de même sens</u> alors $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$**
c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC$.

■ **Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont <u>colinéaires et de sens contraires</u> alors $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$**
c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\,AB \times AC$.

<u>Démonstrations</u> : On a $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$ ou $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$

- Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont <u>colinéaires et de même sens</u> alors $\widehat{BAC} = 0\ [2\pi]$ et $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = 1$

  donc $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$ ou $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC}$ *(cqfd)*

- Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont <u>colinéaires et de sens contraires</u> alors $\widehat{BAC} = \pi\ [2\pi]$ et $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = -1$

  donc $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$ ou $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\,AB \times AC}$ *(cqfd)*

■ **<u>Carré scalaire d'un vecteur</u> : Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, le carré scalaire de $\vec{u}$ est le produit scalaire du vecteur $\vec{u}$ par lui-même. On le note : $\vec{u}^2$.**

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan et deux points A et B tels que $\overrightarrow{AB}$ est un représentant du vecteur $\vec{u}$. On peut écrire :

$$\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos 0 = \|\vec{u}\|^2 \times 1 = \|\vec{u}\|^2 \quad \text{ou encore} \quad \vec{u}^2 = \overrightarrow{AB}^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = AB^2.$$

<u>Exemple</u> : Soit un triangle équilatéral ABC tel que $AB = 4$ et M le milieu du côté [AB].
Calculer la valeur exacte des produits scalaires suivants :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$; $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CM}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC}^2$ et $\overrightarrow{MC}^2$.

→ ☺ Coup de pouce vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=CJxwKG4mvWs&feature=youtu.be

2°/ Produit scalaire et orthogonalité

Définition – Dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux signifie :
■ Soit que $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$;
■ Soit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont respectivement les vecteurs directeurs de deux droites perpendiculaires du plan.

Il en découle le théorème :

Théorème : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Démonstration : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Par disjonction des cas, on a :

– $\vec{u} = \vec{0}$ équivaut à $\vec{u}.\vec{v} = 0$ équivaut à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

– $\vec{v} = \vec{0}$ équivaut à $\vec{u}.\vec{v} = 0$ équivaut à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

– Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan, trois points A, B et C tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient deux représentants respectifs des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$\vec{u}.\vec{v} = 0$ équivaut à $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 0$ équivaut à $\cos(\widehat{BAC}) = 0$ puisque les distances AB et AC sont non nulles vu que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls.

$\cos(\widehat{BAC}) = 0$ équivaut à $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ équivaut à des droites (AB) et (AC) perpendiculaires ce qui équivaut à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

– Donc **deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.** (*cqfd*)

Remarques : ■ Le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur du plan. En effet : $\vec{0}.\vec{v} = 0$.
■ Ce théorème donne aussi une condition nécessaire et suffisante pour démontrer que deux droites du plan sont perpendiculaires. Ainsi :

Deux droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$.

3°/ Propriétés du produit scalaire

3.1 Bilinéarité du produit scalaire

Propriété de bilinéarité du produit scalaire (admise)
– Soient trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ du plan et un nombre réel k, on a :
■ $\vec{u}.(k\vec{v}) = (k\vec{u}).\vec{v} = k \times (\vec{u}.\vec{v})$;
■ $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ ■ $(\vec{u} + \vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$.

Remarque : On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (-\overrightarrow{BA}).\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA}.(-\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA}$.

Exemple : On considère un rectangle ABCD de centre I avec $AB = 5$ et $AD = 3$.
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$ en utilisant la relation de Chasles, puis en déduire une mesure approchée à 0,1° près de l'angle $\widehat{AID}$.

→ ☺ Coup de pouce vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=ca_pW79ik9A&feature=youtu.be

3.2 Conséquences de la bilinéarité du produit scalaire : identités remarquables

Propriétés (conséquence de la bilinéarité d'un produit scalaire
– Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, on a les relations :
- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\,\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$;
- $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\,\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$;
- $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$.

Démonstrations : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.

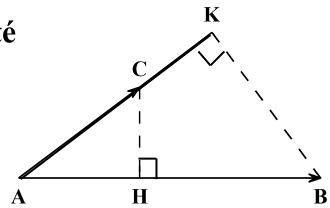
- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})$
  $= \vec{u}.\vec{u} + \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v}$
  $= \vec{u}^2 + \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = \boldsymbol{\vec{u}^2 + 2\,\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2} \quad (cqfd)$
- $(\vec{u}-\vec{v})^2 = (\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})$
  $= \vec{u}.\vec{u} - \vec{u}.\vec{v} - \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v}$
  $= \vec{u}^2 - \vec{u}.\vec{v} - \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = \boldsymbol{\vec{u}^2 - 2\,\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2} \quad (cqfd)$
- $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}.\vec{u} - \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{u} - \vec{v}.\vec{v}$
  $= \vec{u}^2 - \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{v} - \vec{v}^2 = \boldsymbol{\vec{u}^2 - \vec{v}^2} \quad (cqfd)$

4°/ Autres expressions du produit scalaire

4.1 Produit scalaire et projection orthogonale

Théorème : Soient trois points A, B et C non alignés du plan.
Si H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$.

Remarque : on a aussi, de manière analogue (***voir figure ci-contre***), si **K est le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC) alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AC}$.**



Démonstrations : Si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$:
On pose, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}$ où le point H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB). D'après les propriétés de bilinéarité du produit scalaire, on en déduit :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC}$$

On sait que H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) donc les droites (AB) et (HC) sont perpendiculaires et donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HC}$ sont orthogonaux, ce qui équivaut à $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC} = 0$.
On en déduit : $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}}$. (*cqfd*)

De manière analogue : Si K est le projeté orthogonal de B sur la droite (AC) alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AC}$:
On pose, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KB}$ où le point K est le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC).
D'après les propriétés de bilinéarité du produit scalaire, on en déduit :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KB}\right).\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{KB}.\overrightarrow{AC}$$

On sait que K est le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC) donc les droites (AC) et (KB) sont perpendiculaires et donc les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{KB}$ sont orthogonaux, ce qui équivaut à $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{KB}.\overrightarrow{AC} = 0$.
On en déduit : $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AC}}$. (*cqfd*)

Exemple : On considère un triangle ABC isocèle en C tel que $AB = 4$ et $AC = 5$.
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ en utilisant une projection orthogonale, puis en déduire une mesure approchée à 0,1° près des angles du triangle ABC.

→ ☺ Coup de pouce vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=2eTsaa2vVnI&feature=youtu.be

4.2 Expression du produit scalaire en fonction des normes des vecteurs

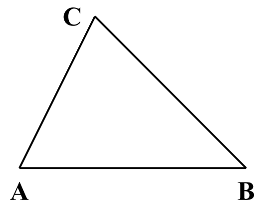
La propriété $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\,\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$ peut encore s'écrire, en introduisant les normes des vecteurs : $\|(\vec{u}-\vec{v})\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ et on peut en déduire une expression du produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ uniquement en fonction des normes des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$:

$$2\,\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|(\vec{u}-\vec{v})\|^2 \text{ et donc } \boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|(\vec{u}-\vec{v})\|^2\right)}.$$

Propriété – Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On a : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|(\vec{u}-\vec{v})\|^2\right)$.

Conséquence – Dans un triangle ABC du plan, on a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$.

Démonstration : On cherche à exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ en fonction des longueurs des trois côtés du triangle ABC.
On pose, d'après la relation de Chasles $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
On en déduit d'après la propriété de bilinéarité du produit scalaire:



$$\overrightarrow{CB}^2 = \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)^2 = \overrightarrow{AB}^2 - 2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2$$

donc $2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{CB}^2 = AB^2 + AC^2 - BC^2$

donc $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)}$. *(cqfd)*

Exemple : Soit un triangle ABC tel que $AB = 4$, $AC = 7$ et $BC = 5$.
a. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.
b. En déduire une mesure approchée à 0,1° près de l'angle $\widehat{ABC}$

→ ☺ Coup de pouce vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=ca_pW79ik9A&feature=youtu.be

4.3 Expression analytique du produit scalaire

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ se calcule grâce aux coordonnées de ces deux vecteurs dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Théorème : Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ est égal à $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.

<u>Démonstration</u> : Cette nouvelle expression se déduit des propriétés de calcul du produit scalaire.

En effet, dans le repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, on peut décomposer les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ en fonction des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ et on obtient : $\vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = x'\,\vec{\imath} + y'\,\vec{\jmath}$ et on en déduit :

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = (x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}).(x'\,\vec{\imath} + y'\,\vec{\jmath}) = (x\,\vec{\imath}).(x'\,\vec{\imath}) + (x\,\vec{\imath}).(y'\,\vec{\jmath}) + (y\,\vec{\jmath}).(x'\,\vec{\imath}) + (y\,\vec{\jmath}).(y'\,\vec{\jmath})$$
$$= (xx') \times \vec{\imath}^2 + (x\,y') \times \vec{\imath}\,.\,\vec{\jmath} + (y\,x') \times \vec{\jmath}.\vec{\imath} + (yy') \times \vec{\jmath}^2$$

Or, dans le **repère orthonormé** $(\mathbf{O}\,;\,\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, on a $\vec{\imath}$ **et** $\vec{\jmath}$ **orthogonaux** donc $\boldsymbol{\vec{\imath}\,.\,\vec{\jmath} = \vec{\jmath}.\vec{\imath} = 0}$, et on en déduit

$$(x\,y') \times \vec{\imath}\,.\,\vec{\jmath} = (y\,x') \times \vec{\jmath}.\vec{\imath} = 0 \quad \text{et donc} \qquad \vec{u}\,.\,\vec{v} = (xx') \times \vec{\imath}^2 + (yy') \times \vec{\jmath}^2$$

De plus, dans le **repère orthonormé** $(\mathbf{O}\,;\,\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, on a $\boldsymbol{\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1}$, et on en déduit

$$(xx') \times \vec{\imath}^2 = xx' \ \text{ et } \ (yy') \times \vec{\jmath}^2 = yy' \quad \text{ donc } \quad \boldsymbol{\vec{u}\,.\,\vec{v} = xx' + yy'}\,. \qquad (cqfd)$$

<u>Théorème</u> : Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathbf{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont orthogonaux <u>si et seulement si</u> $\boldsymbol{xx' + yy' = 0}$.

<u>Remarque</u> : Ce théorème découle du théorème "produit scalaire et orthogonalité" (vu au paragraphe 2 de ce chapitre) et du théorème précédent.

<u>Exemple 1</u> : Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 3-\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} 3+\sqrt{5} \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 2 \\ 3+\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

1. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils orthogonaux ?

2. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont-ils orthogonaux ?

3. Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils orthogonaux ?

4. Que peut-on en déduire ? Le vérifier.

<u>Exemple 2</u> : Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
On considère les points $A(-1\,;2{,}5)$; $B(5\,;0{,}5)$; $C(3\,;-1{,}5)$ et $D(-3\,;-1)$.

1. Démontrer que les droites (AC) et (BC) sont perpendiculaires.

2. a. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

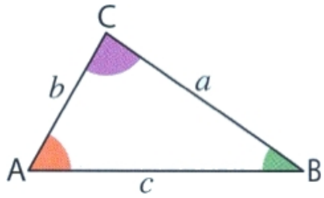
b. En déduire une mesure approchée à 1° près des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BAD}$.

→ ☺ Coup de pouce vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=cTtV4DsoMLQ&feature=youtu.be

5°/ Applications du produit scalaire

5.1 Le Théorème d'Al-Kachi

Activité : L'idée est d'exprimer de deux manières différentes le produit scalaire de deux vecteurs pour obtenir une relation entre les longueurs des trois côtés d'un triangle quelconque et le cosinus de l'un de ses angles.



On considère un triangle ABC tel que $\mathrm{AB} = c$, $\mathrm{AC} = b$ et $\mathrm{BC} = a$,
où a, b et c sont des réels.

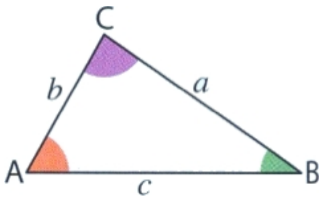
On notera $\widehat{\mathrm{A}}$ la mesure de l'angle de sommet A .
En exprimant de deux manières différentes le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, montrer la relation :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos \widehat{\mathrm{A}} .$$

ATTENTION ! La démonstration du théorème d'Al-Kachi, correction de l'activité, est EXIGIBLE.
→ ☺ Coup de pouce vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=34OJiQ_4-N4&feature=youtu.be **et/ou** livre p.226

Théorème d'Al-Kachi – Avec les notations indiquées sur la figure ci-contre, on a, dans tout triangle ABC :

- $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos \widehat{\mathrm{A}}}$
- $\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times \cos \widehat{\mathrm{B}}}$
- $\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos \widehat{\mathrm{C}}}$



Remarque : On retrouve le théorème de Pythagore si un angle est droit, car son cosinus sera nul.
Ainsi, par exemple, **si** $\widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{90°}$, alors $\mathbf{\cos(90°) = 0}$ et on en déduit :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times 0 \quad \text{donc} \quad \boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}.$$

Exemple : Soit un triangle ABC tel que $\mathrm{AB} = 3$; $\mathrm{AC} = 5$ et $\widehat{\mathrm{BAC}} = 60°$.
Faire une figure et calculer la longueur du côté [BC].

→ ☺ Coup de pouce vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=-cQQAjHJ0Kc&feature=youtu.be

5.2 <u>Ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$</u>

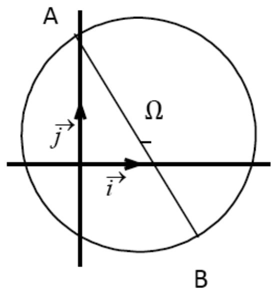
Considérons deux points A et B distincts du plan.

<u>Rappel</u> : Un point M du plan appartient au cercle de diamètre [AB] si et seulement si le triangle ABM est rectangle en M.

Cela signifie, par définition, que les droites (AM) et (BM) sont perpendiculaires et donc que les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$.

<u>Propriété</u> : Si A et B sont deux points distincts du plan, l'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ est le cercle de diamètre [AB].

<u>Démonstration</u> :



Soit Ω le centre du cercle de diamètre [AB]. Pour tout point M du plan :

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega A}).(\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega B})=(\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega A}).(\overrightarrow{M\Omega}-\overrightarrow{\Omega A})$

car Ω le milieu de [AB], donc $\overrightarrow{\Omega B}=-\overrightarrow{\Omega A}$. On en déduit :

$(\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega A}).(\overrightarrow{M\Omega}-\overrightarrow{\Omega A})=\overrightarrow{M\Omega}^2-\overrightarrow{M\Omega}.\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{M\Omega}-\overrightarrow{\Omega A}^2=\overrightarrow{M\Omega}^2-\overrightarrow{\Omega A}^2$.

On en déduit :

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{M\Omega}^2-\overrightarrow{\Omega A}^2=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{M\Omega}^2=\overrightarrow{\Omega A}^2 \Leftrightarrow M\Omega^2=\Omega A^2 \Leftrightarrow M\Omega=\Omega A$

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow M\Omega=\Omega A$ signifie que tout point M du plan tel que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ équivaut à M appartient au cercle de centre Ω et de rayon [ΩA].

Donc **l'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ est le cercle de diamètre [AB].**

→ ☺ Coup de pouce vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=D3n8aYsSQLA&feature=youtu.be

<u>Point méthode</u> : On peut donc <u>déterminer une équation cartésienne d'un cercle</u> du plan muni d'un repère orthonormé, <u>connaissant les coordonnées de deux points diamétralement opposés de ce cercle</u>.

<u>Exemple</u> : Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère deux points $A(2 ; -1)$ et $B(-2 ; 5)$. On considère un point $M(x ; y)$ quelconque du plan et $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre [AB].

1. a. Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ en fonction de x et y.

b. En déduire une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$.

2. Calculer les coordonnées du centre Ω et le rayon r du cercle $\mathcal{C}$.

<u>Remarque</u>: si un point $M(x ; y)$ appartient à un cercle de centre $\Omega(x_\Omega ; y_\Omega)$ et de rayon r, alors on a : $\Omega M = r$ et aussi : $\Omega M^2 = r^2$, soit : $(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2=r^2$ On parle **d'équation cartésienne** du cercle.
Par identification avec l'équation trouvée au **b.** on a : $\Omega(0 ; 2)$ et $r=\sqrt{13}$.