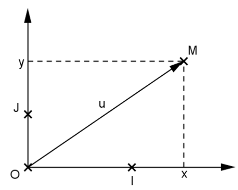
Chapitre 9 — **Vecteurs du plan - approche analytique** — **Livre chap. 5 - 6**

Compétences et capacités du chapitre :

Chercher	Extraire d'un énoncé des informations utiles, les reformuler, les organiser, les confronter à ses connaissances
	Tester, essayer plusieurs pistes de résolution
	Décomposer un problèmes en sous-problèmes, étapes…
Représenter	Représenter un vecteur dont on connaît les coordonnées
	Lire les coordonnées d'un vecteur
	Caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité de vecteurs
Raisonner	Résoudre des problèmes en utilisant la représentation la plus adaptée des vecteurs
	Établir que trois points sont alignés ou non
	Déterminer si deux droites sont parallèles ou sécantes
Calculer	Calculer les coordonnées d'une somme de vecteurs, d'un produit d'un vecteur par un nombre réel
	Calculer la distance entre deux points.
	Calculer les coordonnées du milieu d'un segment
Communiquer	Utiliser un vocabulaire, des notations, des symboles, des unités adaptés
	Savoir rédiger une réponse

Séance 1 : Coordonnées d'un vecteur



On considère un repère (O ; I, J) et un vecteur $\vec{u}$.

La translation de vecteur $\vec{u}$ associe au point O un unique point M. On sait que : $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}$.

Définitions : Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans ce repère sont

les coordonnées $(x\,;\,y)$ du point M (**uniques** dans ce repère) tel que : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

Notation : on peut noter les coordonnées d'un vecteur de deux manières : $\vec{u}(x\,;\,y)$ ou $\vec{u}\binom{x}{y}$.

Remarques : • Un repère du plan, défini par trois points non alignés O, I, J est **orthonormé** lorsque le triangle OIJ est **rectangle isocèle** en O. Le point **O** est **l'origine** du repère, la droite **(OI)** est **l'axe des abscisses** et la droite **(OJ)** est **l'axe des ordonnées**. On a : OI = OJ = 1 unité de longueur.

• Le repère se note (O ; I, J) ou (O ; $\overrightarrow{\mathrm{OI}}, \overrightarrow{\mathrm{OJ}}$).

En posant $\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OJ}} = \vec{\jmath}$, il peut aussi s'écrire (O ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$).

Propriétés : • Pour tout point M$(x\,;\,y)$ dans un repère (O ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$), on a : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$

On dit de le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ a pour coordonnées $(x\,;\,y)$ dans la base ($\vec{\imath}, \vec{\jmath}$).

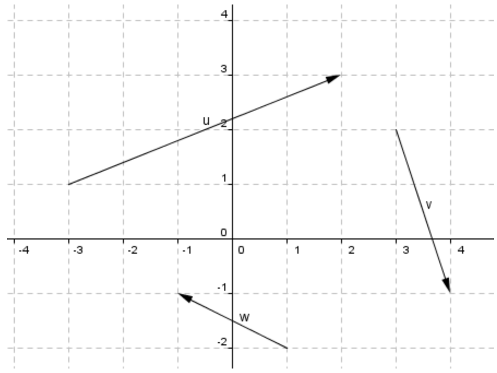
• Pour tout vecteur $\vec{u}$ dans un repère (O ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$), il existe un unique couple de réels $(x\,;\,y)$ tel que :

$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$

On dit de le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x\,;\,y)$ dans la base ($\vec{\imath}, \vec{\jmath}$).

Application : lire les coordonnées d'un vecteur

a) Lire les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ représentés ci-contre.



b) Construire un représentant du vecteur $\vec{a}(-4\,;\,-1)$.

Remarque : le vecteur nul $\vec{0}$ a pour coordonnées (0 ; 0).

☺ Coup de pouce vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=8PyiMHtp1fE&feature=youtu.be

Propriété : Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$

On considère un repère (O, $\vec{\imath},\vec{\jmath}$) et les points $\mathrm{A}(x_A; y_A)$ et $\mathrm{B}(x_B; y_B)$.

Alors on a : $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ($x_B - x_A$; $y_B - y_A$).

Remarque : L'ordre dans lequel on écrit les coordonnées de A et B est donc important.

Application : calculer les coordonnées d'un vecteur

Dans un repère, on considère les points A(2 ; – 3), B(– 1 ; 5) et C(– 2 ; 3).

Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$.

☺ Coup de pouce vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=wnNzmod2tMM&feature=youtu.be

Propriétés : Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ dans un repère (O ; $\vec{\imath},\vec{\jmath}$) et k un nombre réel. Alors :

- $\vec{u}=\vec{v}$ **si et seulement si** $x = x'$ et $y = y'$.
- Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$.
- Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$.

Application : calculer les coordonnées d'une somme de vecteurs

Dans un repère, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$.

Application : calculer les coordonnées d'un vecteur $k\vec{u}$

Dans un repère, on a les vecteurs $\vec{u}(-3; 1)$ et $\vec{v}(\frac{1}{2}; -1)$. Déterminer les coordonnées de : $\frac{2}{3}\vec{u}$ et de : $-2\vec{v}$.

Séance 2 : Distance entre deux points, norme d'un vecteur

On considère un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé.

Propriétés : On considère les points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$.

- Le milieu H du segment [AB] a pour coordonnées : $H\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

- La distance AB est donnée par AB = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

- La longueur du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égale à AB.

  On l'appellera la **norme** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et on la notera : $\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Propriété : La norme d'un vecteur $\vec{u}\binom{x}{y}$, notée $\|\vec{u}\|$ est alors donnée par : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

En effet, si $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ alors $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{(x - x_O)^2 + (y - y_O)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Application : calculer une norme

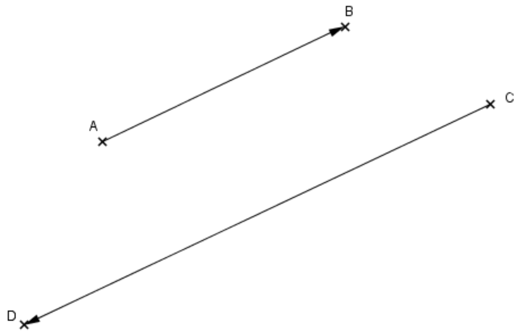
Dans un repère, on considère les points A(– 1 ; 3), B(7 ; – 1), C(5 ; 0) et le vecteur $\vec{u}(-2 ;\ 1{,}5)$.

Calculer : BC, $\|\overrightarrow{AB}\|$ et $\|\vec{u}\|$.

☺ Coup de pouce vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=pP8ebg8W9o8&feature=youtu.be

Séance 3 : Critère de colinéarité, déterminant de deux vecteurs

On considère un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé.



Définition : Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont dits ***colinéaires*** s'ils ont la même direction, c'est-à-dire si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Remarque : *Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.*

Propriété : Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Application : démontrer que des droites sont parallèles en utilisant la colinéarité

Dans un repère, on considère les points A(– 1 ; 3), B(7 ; – 1), C(5 ; 1) et D(3 ; 2).

Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

☺ Coup de pouce vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=hp8v6YAQQRI&feature=youtu.be

Conséquence : Les trois points A, B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **colinéaires**.

Application : démontrer que des points sont alignés en utilisant la colinéarité

Dans un repère, on considère les points A(– 1 ; 3), B(7 ; – 1), C(5 ; 0).

Démontrer que les points A, B et C sont alignés.

☺ Coup de pouce vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=dZ81uKVDGpE&feature=youtu.be

Comme nous l'avons dit précédemment, la colinéarité de deux vecteurs non nuls $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ se traduit par l'existence d'un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Autrement dit, les coordonnées de $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont telles que : $x = kx'$ et : $y = ky'$.

Ce qui se traduit encore par le fait que **les coordonnées de $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont proportionnelles**.

D'où la propriété suivante :

Propriété : Les vecteurs non nuls $\vec{u}(x\,;y)$ *et* $\vec{v}(x'\,;y')$ sont **colinéaires** si et seulement si $xy' - x'y = 0$.

Démonstration : • Si un des deux vecteurs est nul, la propriété est évidemment vraie.

• Sinon :

* Soit $\vec{u}(x\,;y)$ *et* $\vec{v}(x'\,;y')$ deux vecteurs colinéaires.

Alors il existe un réel k tel que : $x = kx'$ et : $y = ky'$.

On a donc : $xy' - x'y = kx'y' - x'ky' = 0$.

* Réciproquement soit deux vecteurs $\vec{u}(x\,;y)$ *et* $\vec{v}(x'\,;y')$ tels que : $xy' - x'y = 0$

avec par exemple $y' \neq 0$ ($\vec{v}$ n'étant pas nul, on suppose que c'est son ordonnée qui n'est pas nulle.).

On a alors : $xy' = x'y$ soit : $x = \frac{y}{y'}x'$. En posant $k = \frac{y}{y'}$ on a : $x = kx'$ et : $y = ky'$.

Donc il existe k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$, et donc $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont colinéaires.

☺ Démonstration en vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=VKMrzaiPtw4&feature=youtu.be

Définitions : On considère les deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé.

Le **déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$**, noté : $\det(\vec{u}\,;\vec{v})$ ou : $\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}$ est le nombre :

$$\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = \begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix} = x \times y' - x' \times y$$

Remarque : Donc l'ordre dans lequel on écrit les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est important.

Propriété : La propriété précédente s'écrit alors :

Les vecteurs non nuls $\vec{u}(x\,;y)$ *et* $\vec{v}(x'\,;y')$ sont **colinéaires** si et seulement si **$\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = 0$**.

Application : <u>trouver les coordonnées d'un point en utilisant la colinéarité</u>

Dans un repère, on considère les vecteurs $\vec{u}(2\,;5)$ et $\vec{v}(x\,;3)$.

Déterminer la valeur de x pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

☺ Coup de pouce vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=MeHOuwy81-8&feature=youtu.be