Jeudi 27 mars 2025 **Groupes de 1ère B (F Villette)**

Devoir Surveillé de Spécialité Mathématiques niveau 1ère

Durée : 2 heures *ÉLÉMENTS DE CORRECTION* **Calculatrice autorisée**

Le sujet est composé de 6 exercices présentés sur 3 pages.

Le sujet en entier sera rendu avec votre copie.

Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. La qualité de l'expression et la rigueur de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de votre copie ... Bon travail !

Exercice 1 : 3 points

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples) pour lequel ***une seule réponse par question est exacte. On ne demande aucune justification****.*

Vous reporterez sur votre copie le numéro de la question suivie de la lettre correspondante à votre choix pour la proposition que vous jugez exacte. Une bonne réponse rapporte 0, 5 point.

Une absence de réponse, plusieurs réponses ou une réponse fausse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. Soit la suite arithmétique (u_n) de raison 7 et de terme $u_0 = 3$. Alors, pour tout entier naturel n, on a :

a. $u_n = 3n + 7$ **b.** $u_n = 7 \times 3^n$ **c.** $u_n = 3 \times 7^n$ **d.** $u_n = 7n + 3$

2. Soit la suite arithmétique (a_n) telle que $a_5 = 4$ et $a_{15} = 19$. Alors, on peut en déduire :

a. $a_0 = -3$ **b.** $a_{10} = 11{,}5$ **c.** $a_{20} = 28$ **d.** $a_{30} = 40$

3. La somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{80} k = 2 + 3 + 4 + \cdots + 79 + 80$ est égale à :

a. 3240 **b.** 3160 **c.** 3159 **d.** 3239

4. La suite (a_n) est définie par $a_0 = 20$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $a_{n+1} = 10a_n - 100$. Alors …

a. $a_2 = 100$ **b.** $a_3 = 8\,900$ **c.** $a_4 = 89\,000$ **d.** $a_5 = 889\,000$

5. (u_n) est la suite arithmétique de premier terme u_0 et telle que $u_3 = -4$ et $u_{12} = -17{,}5$. Sa raison est :

a. $r = -0{,}5$ **b.** $r = \frac{-3}{2}$ **c.** $r = \frac{1}{2}$ **d.** $r = 1{,}5$

6. (u_n) est la suite arithmétique de raison 1,5 telle que $u_0 = 5$.

Avec la calculatrice, on conjecture que la suite (u_n) a pour limite …

a. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ **b.** $\lim\limits_{n \to +\infty} u = -5$ **c.** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ **d.** $\lim\limits_{n \to +\infty} u = +\infty$

Exercice 2 : 2 points

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = 2 + \frac{1}{n^2}.$$

Pour chacune des deux propositions suivantes, dire d'abord si elle est VRAIE ou FAUSSE (on pourra s'aider de la calculatrice pour trouver la réponse), puis justifier clairement votre réponse, par une démonstration si la proposition est vraie ou par un contre-exemple si elle est fausse.

Proposition 1 : La suite (u_n) est arithmétique ; FAUX

On a : $u_1 = 2 + \frac{1}{1^2} = 3$ $u_2 = 2 + \frac{1}{2^2} = \frac{9}{4}$ $u_3 = 2 + \frac{1}{3^2} = \frac{19}{9}$ et : $u_2 - u_1 = -\frac{3}{4}$ et : $u_3 - u_2 = -\frac{5}{36}$

Donc : $u_2 - u_1 \neq u_3 - u_2$ Donc (u_n) n'est pas une suite arithmétique.

Proposition 2 : La suite (u_n) est décroissante pour tout entier naturel n non nul ; VRAI

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} - u_n = 2 + \frac{1}{(n+1)^2} - \left(2 + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 - (n+1)^2}{(n+1)^2 n^2} = \frac{-2n - 1}{(n+1)^2 n^2} < 0$$

Exercice 3 : 4 points

Soit une suite (w_n) définie par $w_1 = 0$ et pour tout entier naturel n non nul par :

$$w_{n+1} = \frac{nw_n + 4}{n+1}.$$

1. Calculer w_2 et w_3 ***(on détaillera les calculs)***.

$w_{1+1} = \frac{1\times w_1+4}{1+1} = 2$ et : $w_{2+1} = \frac{2\times w_2+4}{2+1} = \frac{8}{3}$

2. On considère une suite (a_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $a_n = nw_n$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $a_{n+1} = nw_n + 4$.

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_{n+1} = (n+1)w_{n+1} = (n+1)\frac{nw_n+4}{n+1} = \frac{n+1}{n+1}(nw_n + 4) = nw_n + 4$

b. Montrer alors que (a_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme a_1.

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_{n+1} - a_n = nw_n + 4 - nw_n = 4$ (indépendant de n).

Donc la suite (a_n) est une suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $a_1 = 1 \times w_1 = 0$.

c. En déduire l'expression du terme général a_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = a_1 + (n-1)\times 4 = 4n - 4$

3. a. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$w_n = 4 - \frac{4}{n}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = \frac{a_n}{n} = \frac{4n-4}{n} = 4 - \frac{4}{n}$

b. La suite (w_n) semble-t-elle convergente ? Justifier.

La suite (w_n) semble converger vers 4.

En effet,

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty}\left(4 - \frac{4}{n}\right) = 4$$

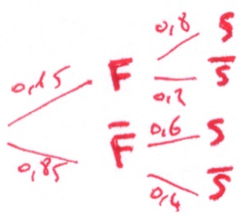
Exercice 4 : 3 points

Le service comptable d'un magasin réalise une étude sur le fichier des clients qui ont fait des achats le premier samedi du mois de novembre 2019.
Il constate que 15% des clients ont effectués leurs achats avec une carte de fidélité.
Parmi ceux-ci, 80% ont réalisé des achats d'un montant supérieur à 50 €.
Parmi les clients qui n'ont pas effectué leurs achats avec une carte de fidélité, 60% ont réalisés des achats d'un montant supérieur à 50 €.

On choisit au hasard un client dans le fichier client. On considère les événements :

- F : « Le client a effectué ses achats avec une carte de fidélité ».
- S : « Le client a réalisé des achats d'un montant supérieur à 50 € »

1) Construire un arbre pondéré représentant cette situation.



2) Décrire par une phrase l'événement $F \cap S$, puis calculer sa probabilité $P(F \cap S)$

$F \cap S$: « Le client a effectué ses achats avec une carte de fidélité et a réalisé des achats d'un montant supérieur à 50 €. »

On a : $P(F \cap S) = P(F) \times P_F(S) = 0{,}15 \times 0{,}8 = 0{,}12$

3) Montrer que la probabilité de l'événement S est 0,63.

On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements : $\{F; \bar{F}\}$. On a :

$P(S) = P(F \cap S) + P(\bar{F} \cap S) = 0{,}12 + P(\bar{F}) \times P_{\bar{F}}(S) = 0{,}12 + 0{,}85 \times 0{,}6 = 0{,}12 + 0{,}51 = 0{,}63$

4) Calculer la valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité de l'événement « Le client a effectué ses achats avec une carte de fidélité sachant qu'il a réalisé des achats d'un montant inférieur à 50 € »

$$P_{\bar{S}}(F) = \frac{P(\bar{S} \cap F)}{P(\bar{S})} = \frac{P(F) \times P_F(\bar{S})}{1 - P(S)} = \frac{0{,}15 \times 0{,}2}{1 - 0{,}63} = \frac{0{,}03}{0{,}37} \approx 0{,}081$$

Exercice 5 : 4 points

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = \frac{n^2}{n+1}$.

On se propose d'étudier le sens de variations de cette suite de deux manières.

Partie A

Soit f une fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

1) Déterminer la dérivée de f, notée f'.

On a, en posant pour tout x de $]-1\,;+\infty[$, $u(x) = x^2$ et : $v(x) = x + 1$, $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

$u'(x) = 2x$ $v'(x) = 1$

Alors, pour tout x de $]-1\,;+\infty[$, $f'(x) = \frac{u'(x)\times v(x) - u(x)\times v'(x)}{v^2(x)} = \frac{2x\times(x+1) - x^2\times 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$.

2) Dresser le tableau de variations de la fonction f <u>en justifiant votre démarche</u>.

Les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ sont données par le signe de sa dérivée sur$]-1\,;+\infty[$.

D'après le 1) le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ est celui de son numérateur $x(x+2)$.

On reconnaît la forme factorisée d'une fonction polynôme de degré 2, ayant donc pour racines : $x_1 = -2$ et $x_2 = 0$.
Comme $a = 1 > 0$ alors $f'(x)$ est du signe de a sur $]-2\,;0\,[$ et du signe de $-a$ sur $]-\infty\,;-2[\,\cup\,]0\,;+\infty\,[$.

Comme de plus : $f(0) = f'(0) = 0$, on a sur $]-1\,;+\infty[$ le tableau de signe pour $f'(x)$ et le tableau de variations pour f :

	-1		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

3) En déduire le sens de variations de la suite (u_n).

La fonction f est donc croissante sur $[0\,;+\infty[$, la suite (u_n) l'est donc aussi pour tout entier naturel n.

Partie B

1) Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)^2}{(n+1)+1} - \frac{n^2}{n+1} = \frac{(n+1)(n+1)^2}{(n+2)(n+1)} - \frac{(n+2)n^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)(1+2n+n^2) - n^3 - 2n^2}{(n+2)(n+1)} = \frac{n^2+3n+1}{(n+2)(n+1)}$

2) En déduire le sens de variations de la suite (u_n).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n+1>0$, $n+2>0$ et : $n^2+3n+1>0$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n>0$, soit : $u_{n+1}>u_n$.

La suite (u_n) est donc strictement croissante pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 : 4 points

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{2x}{x^2+9}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

1. Montrer que, pour tout nombre réel $x \geq 0$, on a :

$$f'(x)=\frac{2(3+x)(3-x)}{(x^2+9)^2}.$$

On pose, pour tout x de $\mathbb{R}$: $u(x)=2x$ et $v(x)=x^2+9$. Ces deux fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

On a : $u'(x)=2$ et $v'(x)=2x$ et alors, pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ et : $f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}$.

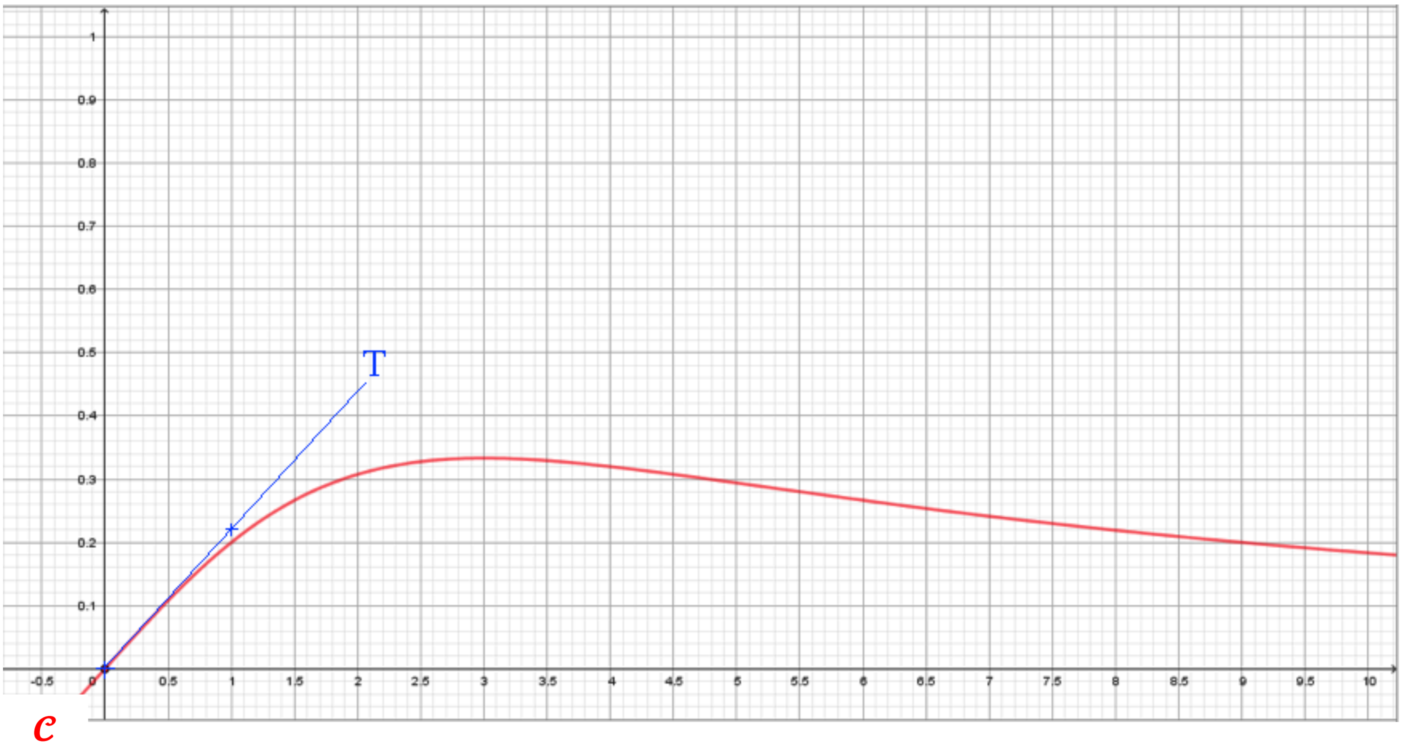
D'où : $\forall x \in [0\,;\,+\infty[$, $f'(x)=\frac{2(x^2+9)-2x\times 2x}{(x^2+9)^2}=\frac{2x^2+18-4x^2}{(x^2+9)^2}=\frac{18-2x^2}{(x^2+9)^2}=\frac{2(9-x^2)}{(x^2+9)^2}=\frac{2(9-x^2)}{(x^2+9)^2}=\frac{2(3+x)(3-x)}{(x^2+9)^2}$

2. a. Déterminer une équation de la droite T, tangente à la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction f au point d'abscisse 0.

D'après le cours, $T : y=f'(0)\times(x-0)+f(0)$ avec : $f'(2)=\frac{18}{81}=\frac{2}{9}$ et : $f(0)=0$;

Soit : $T : y=\frac{2}{9}x$

b. Sur la courbe ci-dessous, on a représenté une partie de la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction f.
Construire ci-dessous la droite T **avec précision** en laissant les traits de construction.



3. a. Justifier que $f'(x)$ a le même signe que $3-x$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

$\forall x \in [0\ ;\ +\infty[\quad 3+x>0\ \ ;\ \ x^2+9>0$ et : $(x^2+9)^2>0$

Donc $\forall x \in [0\ ;\ +\infty[\quad f'(x)=\frac{2(3+x)(3-x)}{(x^2+9)^2}$ est du signe de $3-x$ (fonction affine).

b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

On a donc : avec $f(3)=\frac{2\times 3}{3^2+9}=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$

x	0		3		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	

c. Justifier que pour tout réel $x \geq 0$, $f(x) \leq \frac{1}{3}$.

D'après le tableau de variations de la question précédente, la fonction f admet un maximum sur $[0\ ;\ +\infty[$ en $x=3$ (sa dérivée s'annule en $x=3$ en changeant de signe). Donc $\forall x \in [0\ ;\ +\infty[\quad f(x) \leq f(3)=\frac{1}{3}$

<u>**Ou**</u> par le calcul : Soit $x \in [0\ ;\ +\infty[$ alors $0 \leq (x-3)^2$ soit : $0 \leq x^2-6x+9$ soit : $3\times 2x \leq x^2+9$

soit : $\frac{3\times 2x}{x^2+9} \leq 1$ soit : $\frac{2x}{x^2+9} \leq \frac{1}{3}$ soit : $f(x) \leq \frac{1}{3}$

4. Conjecturer puis démontrer la position de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite T sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

La courbe $\mathcal{C}$ semble au-dessous de la droite T sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

On étudie le signe de la quantité : $f(x)-y$, différence entre l'ordonnée d'un point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x et celle du point de T d'abscisse x également.

Soit $x \in [0\ ;\ +\infty[$, $f(x)-y=\frac{2x}{x^2+9}-\frac{2}{9}x=\frac{9\times 2x-2x\times(x^2+9)}{9\times(x^2+9)}=\frac{18x-2x^3-18x}{9\times(x^2+9)}=\frac{-2x^3}{9\times(x^2+9)} \leq 0$

Donc $f(x)-y$ est du signe de $-2x^3$ et s'annule en $x=0$.

On a finalement :

- si $x \in\ ]0; +\infty[$, $-2x^3<0$ et donc $f(x)-y<0$ soit $f(x)<y$: la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessous de la droite T ;
- si $x=0$, $f(x)-y=0$ et donc $f(x)=y$: les deux courbes sont confondues.